下载APP

03 | 备忘录：如何避免递归中的重复计算?

2020-09-18 卢誉声

动态规划面试宝典 进入课程 >

讲述：卢誉声
时长 19:13 大小 17.60M

你好，我是卢誉声。

从前面的课程中我们已经看到，动态规划问题的一般形式就是求最值。因此我先讲解了什么是最优解问题，在考虑整体最优的情况下，我们需要找到一种办法获取最优解。那么最简单直接的做法是什么呢?

其实就是把所有可行的答案**穷举**出来，然后在所有可行的答案中找出满足条件的最值。

这样的解法看似“天衣无缝”，但它有着重要的缺陷，而且这个缺陷是我们在面试过程中需要极力避免的：它的执行效率极低。

导致这个问题的罪魁祸首是重叠子问题，我已经不止一次提到这个概念了。那么你该**如何解决重叠子问题并提高算法效率呢？**

接下来我们就带着这个问题，开始学习今天的内容：备忘录。看看它能否有效解决递归过程中出现的大量重复计算的问题，提高算法效率。

什么是重叠子问题？

斐波那契数列没有求最值的问题，因此严格来说它不是最优解问题，当然也就不是动态规划问题。但它能帮助你理解什么是重叠子问题。首先，它的数学形式即递归表达是这样的：

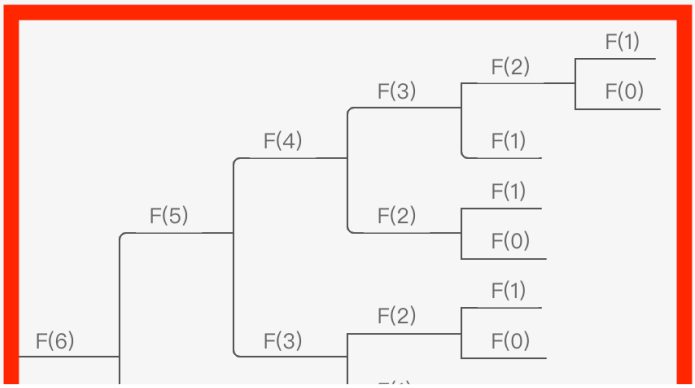
$$F(n) = \begin{cases} 0, n = 0 \\ 1, n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), n > 1 \end{cases}$$

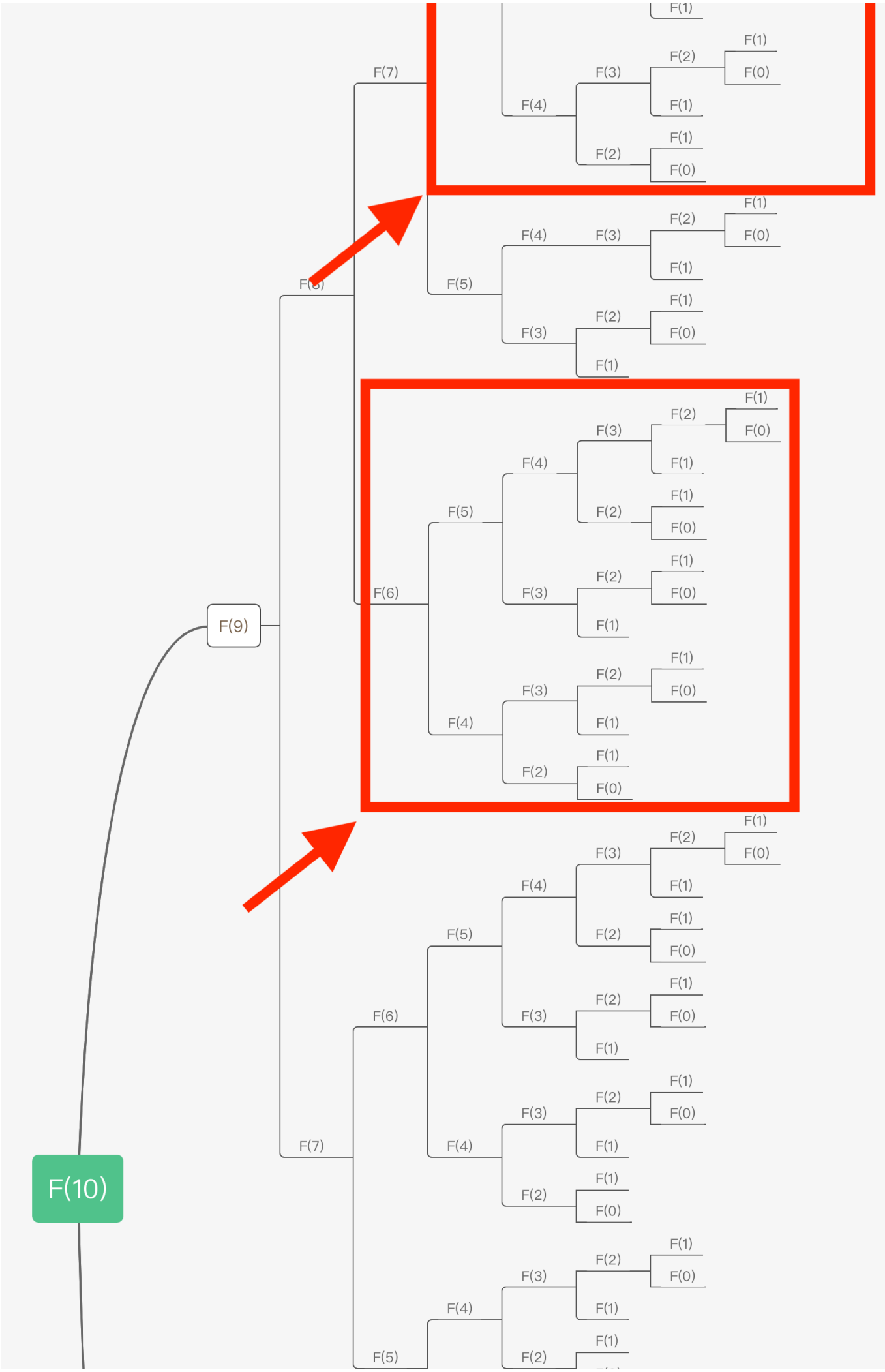
因此写成代码也极为简洁：

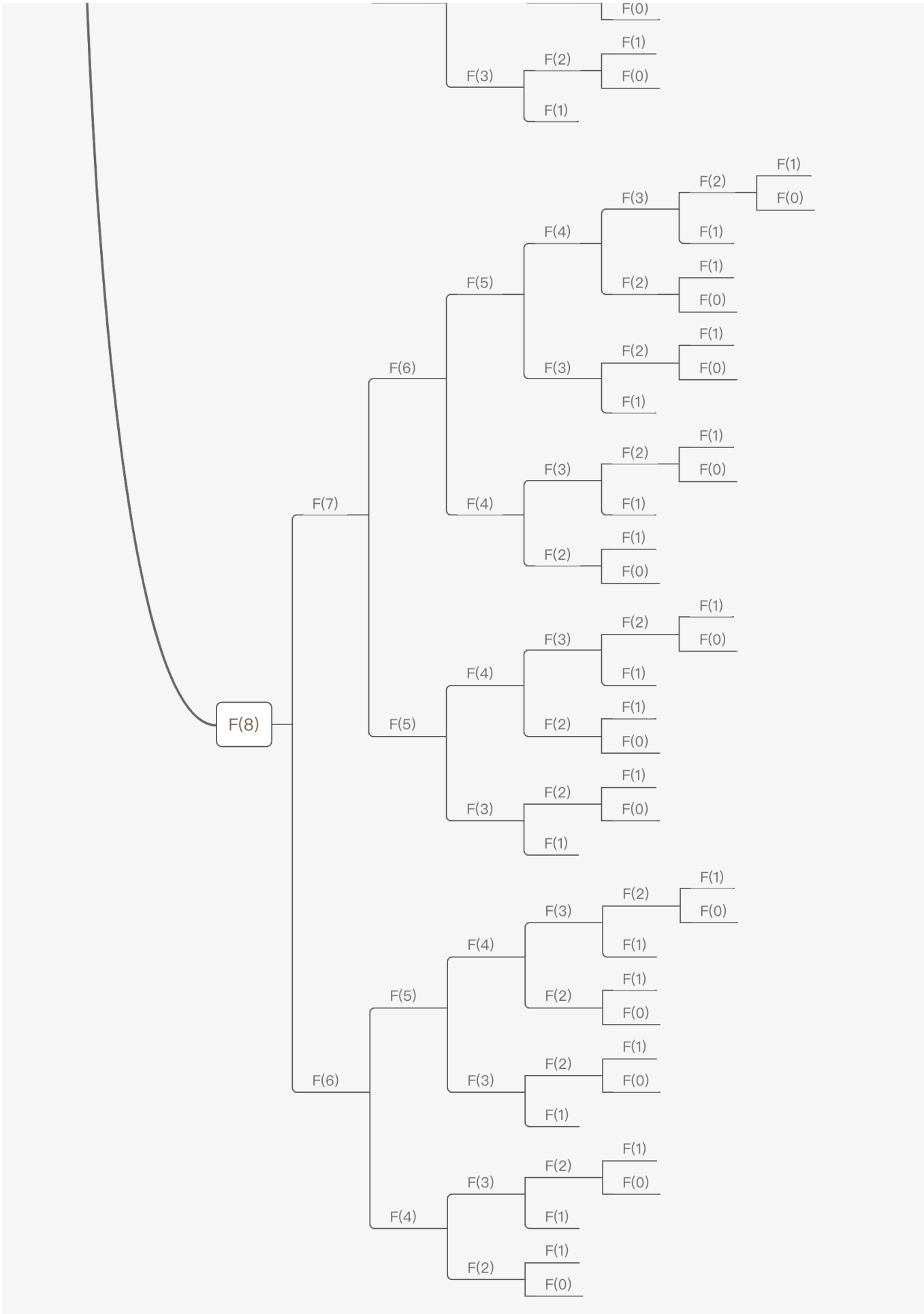
复制代码

```
int Fibonacci(int n) {
  if (0 == n || 1 == n) { return n; }
  if(n > 1) { return Fibonacci(n - 1) + Fibonacci(n - 2); }

  return 0; // 如果输入n有误，则返回默认值
}
```

这个代码有问题吗？没问题，但是它效率极低。那么它效率低在哪里呢？假设上面的函数调用输入是 10，我把递归树画出来：




F(10)
F(9)
F(8)
F(7)
F(6)
F(5)
F(4)
F(3)
F(2)
F(1)
F(0)


F(8)
F(7)
F(6)
F(5)
F(4)
F(3)
F(2)
F(1)
F(0)

我们要怎么理解这个递归树呢？如果要计算原问题 F(10)，你就需要先计算出子问题 F(9) 和 F(8)，如果要计算 F(9)，你就需要先计算出子问题 F(8) 和 F(7)，以此类推。这个递归的终止条件是当 F(1)=1 或 F(0)=0 时结束。

我在这里画出整个递归树的目的，在于向你尽可能详细地展示递归的过程，但凡遇到递归问题，你最好都能画出递归树，这对你分析算法的复杂度，寻找算法低效的原因都有巨大帮助。

但你也看到了，即便如此简单的递归过程，这个树也十分“巨大”。

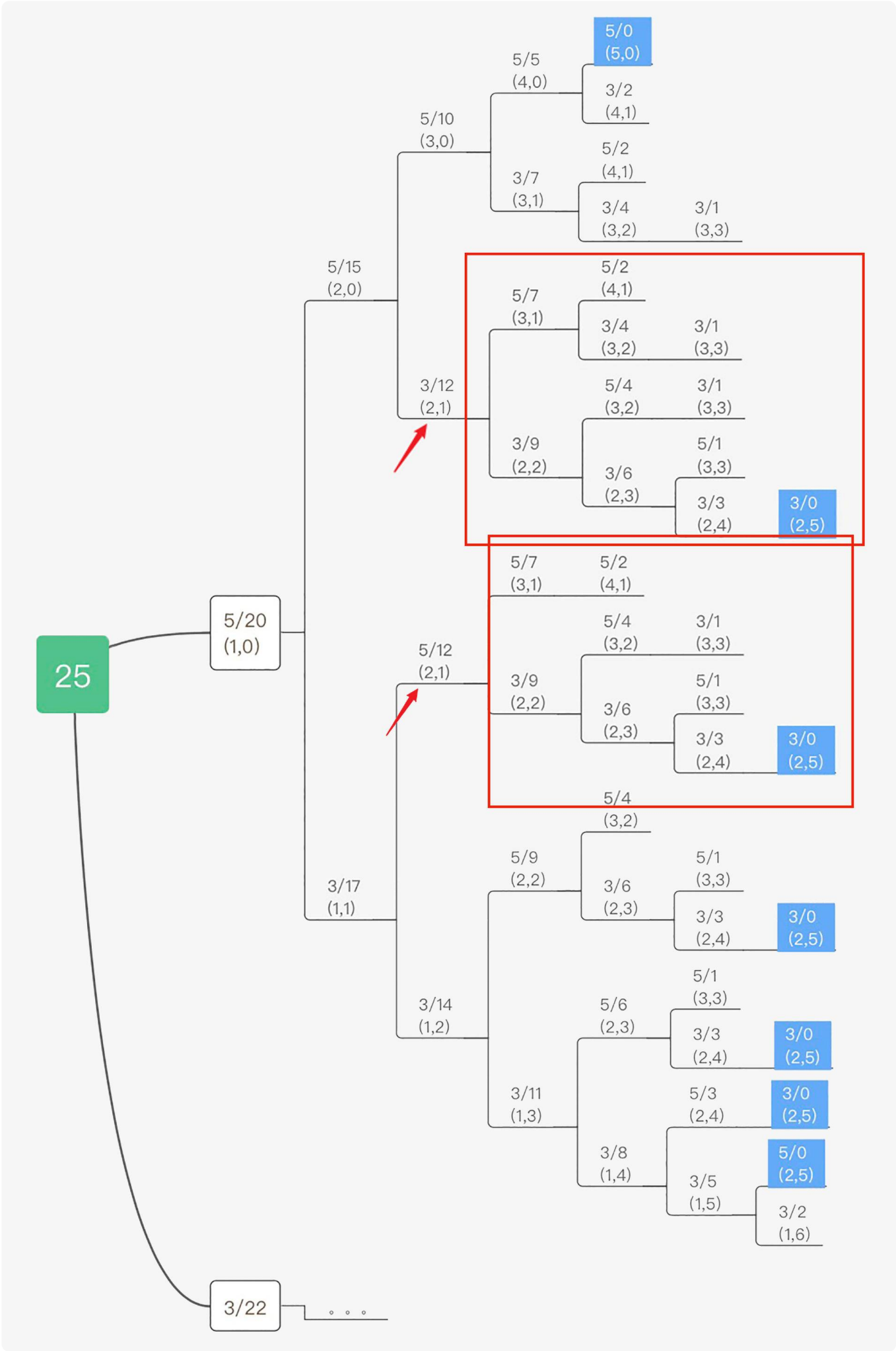
在画求解树的时候，你可以想出求解过程是怎么进行的，但如果求解树的分支极多，那么很多人就很难继续在脑海中模拟出整个求解过程了。因此问题过于复杂，一般是无法直接画出像上面我画的那棵求解树的，即便递归在数学意义上非常直观。

因此，我给你的建议是画出主要的分支路径，帮助你理解和解决面试问题。

画完斐波那契数列的求解树之后，你发现问题没有？在我用红色标出的两个区域中，它们的递归计算过程完全相同！

这意味着，第 2 个红色区域的计算是“完全没有必要的”，它是重复的计算。因为我们已经在求解 F(7) 的时候把 F(6) 的所有情况计算过了。因此我们把第 2 个红色区域的计算称为**重叠子问题**。

这种问题常见吗？答案是肯定的。让我们回到硬币找零的问题上，我们把上一课的求解树再拿出来观察一下：


25
5/20
(1,0)
3/22
. . .
5/15
(2,0)
3/17
(1,1)
5/10
(3,0)
3/12
(2,1)
5/5
(4,0)
3/7
(3,1)
5/0
(5,0)
3/2
(4,1)
5/2
(4,1)
3/4
(3,2)
3/1
(3,3)
5/7
(3,1)
3/9
(2,2)
5/4
(3,2)
3/6
(2,3)
5/1
(3,3)
3/3
(2,4)
3/0
(2,5)
5/12
(2,1)
3/14
(1,2)
5/9
(2,2)
3/11
(1,3)
5/6
(2,3)
5/3
(2,4)
3/8
(1,4)
3/5
(1,5)
3/2
(1,6)

从上图中，我们看到了类似的模式，我同样圈选出了两个红色区域，其中第 2 个即 5/12(2, 1) 的递归子问题与第 1 个 3/12(2, 1) 的递归子问题完全相同，因此它们是**重叠子问题**。

对于我们实现的这个递归算法，它的复杂度是多少呢？

1. 先考虑子问题的个数（即上图中节点的总数），二叉树节点总数为指数级别，因此子问题个数为指数级 $O(2^n)$；
2. 再考虑求解一个子问题的复杂度：没有计算，因此是 O(1)；
3. 综上所述，该算法的时间复杂度是 $O(2^n)$。

事实上在面试或工程实践中，指数级别的复杂度已经很难让人接受了，除非情况特殊，我们必须想办法来优化算法的时间复杂度。

该怎么做呢？到这，其实我们要解决的问题已经十分清晰明了了：只需要将重复计算的部分跳过，复用之前已经计算过的结果，以此来加速算法。

递归中的备忘录：解决重复计算的法宝

备忘录即正义

现在，我们明确了亟待解决的问题：消除重叠子问题，即消灭重复计算的过程。我们可以创建一个**备忘录**（memorization），在每次计算出某个子问题的答案后，将这个临时的中间结果记录到备忘录里，然后再返回。

接着，每当遇到一个子问题时，我们不是按照原有的思路开始对子问题进行递归求解，而是先去这个备忘录中查询一下。如果发现之前已经解决过这个子问题了，那么就直接把答案取出来复用，没有必要再递归下去耗时的计算了。

对于备忘录，你可以考虑使用以下两种数据结构：

1. 数组（Array），通常对于简单的问题来说，使用一维数组就足够了。在后续的课程中，你会看到更为复杂的状态存储过程，届时我会指导你使用更高维度（二维甚至三维）的数组来存储状态。

2. 哈希表（Hash table），如果你存储的状态不能直接通过索引找到需要的值（比如斐波那契数列问题，你就可以直接通过数组的索引确定其对应子问题的解是否存在，如果存在你就拿出来直接使用），比如你使用了更高级的数据结构而非简单的数字索引，那么你还可以考虑使用哈希表，即字典来存储中间状态，来避免重复计算的问题。

我们先来看看如何使用备忘录来解决斐波那契数列问题，直接上代码。

Java 实现：

复制代码

```java
int fibonacci(int n, int[] memo) {
    if (0 == n || 1 == n) { return n; }
    if (memo[n] != 0) { return memo[n]; } // 看来备忘录中找到了之前计算的结果，既然找

    if(n > 1) {
        memo[n] = fibonacci(n - 1, memo) + fibonacci(n - 2, memo);
        return memo[n];
    }

    return 0; // 如果数值无效(比如 < 0)，则返回0
}

int fibonacciAdvance(int n) {
    int[] memo = new int[n + 1];
    return fibonacci(n, memo);
}
```

C++ 实现：

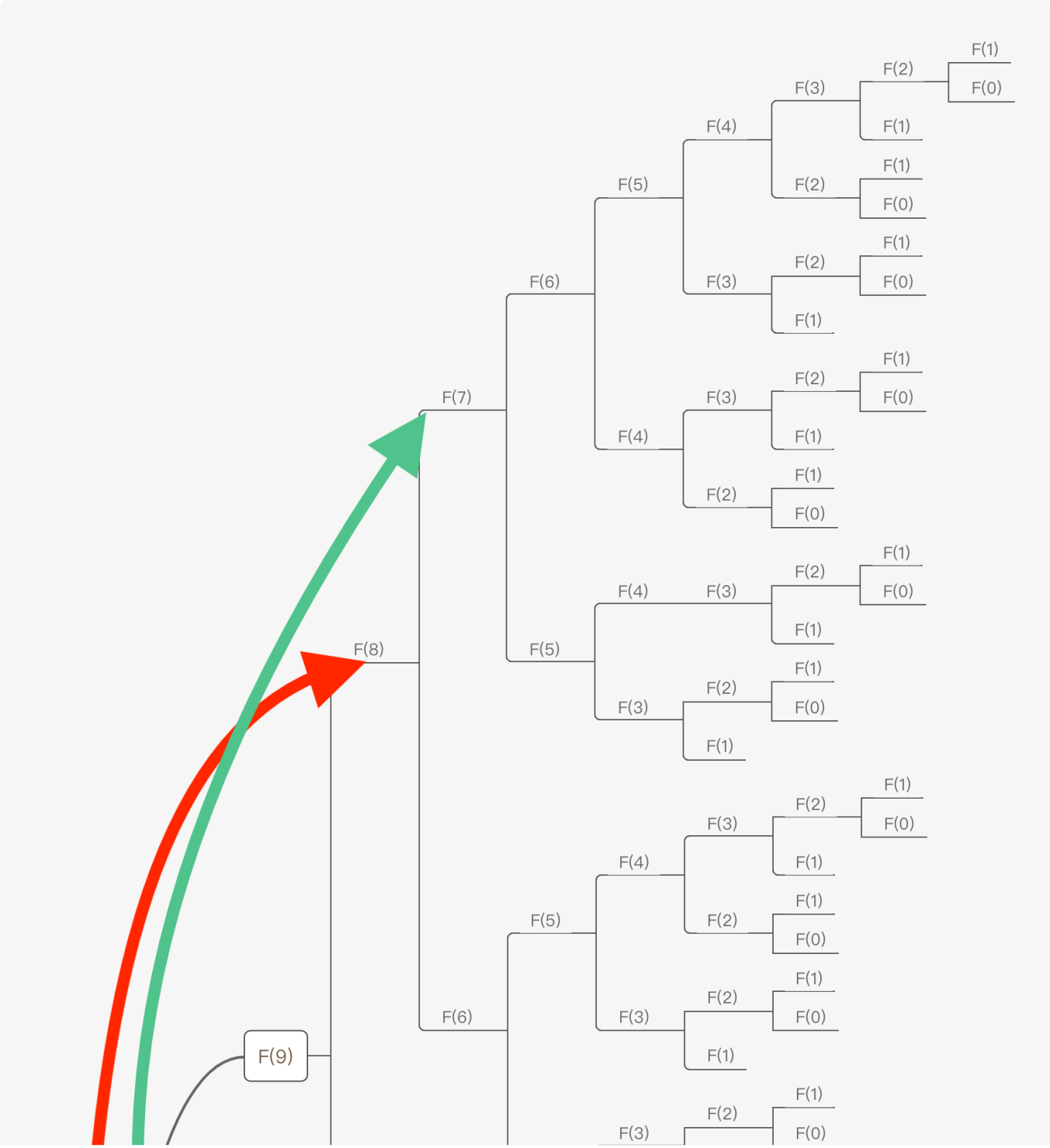
复制代码

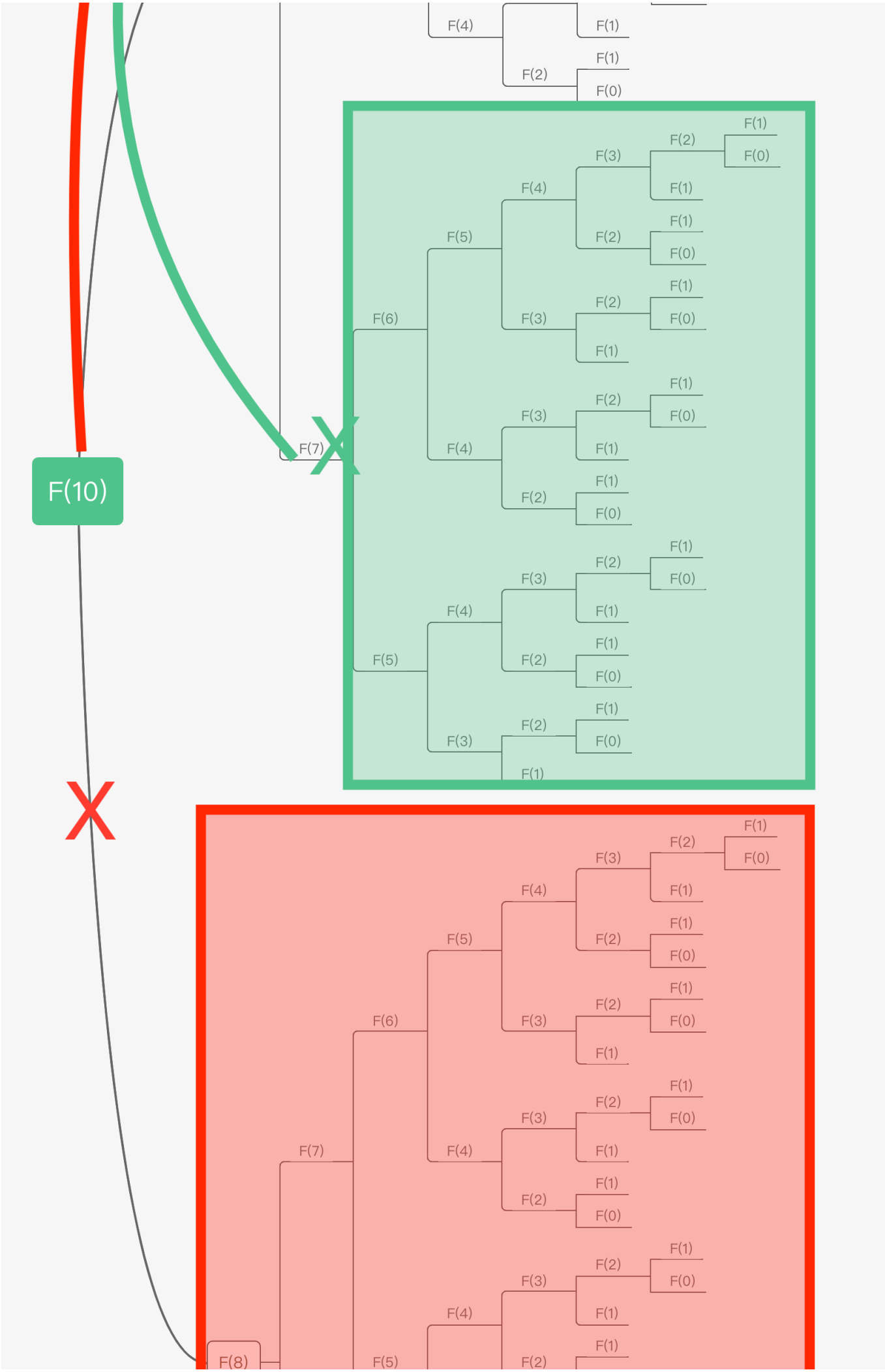
```cpp
int Fibonacci(int n, std::vector<int>& memo) {
  if (0 == n || 1 == n) { return n; }
  if (memo[n] != 0) { return memo[n]; } // 看来备忘录中找到了之前计算的结果，既然找到

  if(n > 1) {
    memo[n] = Fibonacci(n - 1, memo) + Fibonacci(n - 2, memo);
    return memo[n];
  }

  return 0; // 如果数值无效(比如 < 0)，则返回0
}

int FibonacciAdvance(int n) {
```

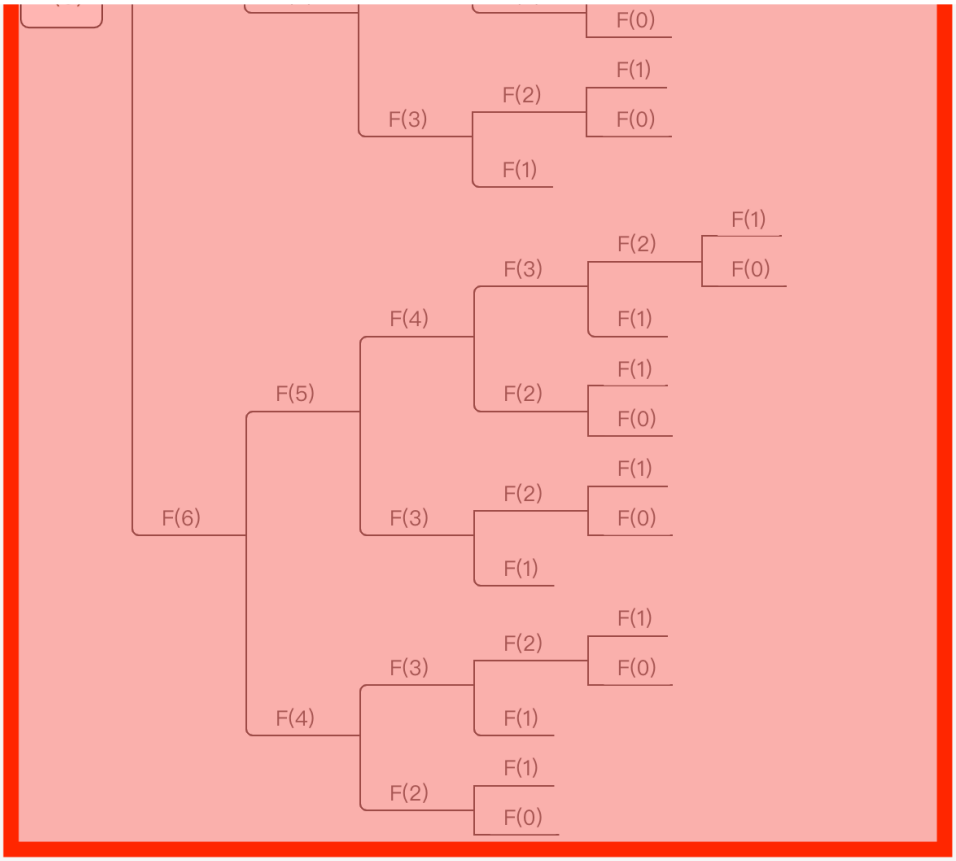
```
14    std::vector<int> memo(n + 1, 0); // 初始化备忘录，在这里我使用数组
15    return Fibonacci(n, memo);
16  }
```

从以上代码可以看出，我在第 12 行创建了一个基于数组的备忘录，用来存储中间计算状态。第 3 行代码十分关键，它从我们的备忘录中查询对应索引位置存储的状态是否已经计算过（值 > 0 时），如果计算过了，那么就直接返回之前计算过的答案。

我在下图中，把两个重复计算的分支画了出来，你可以清晰地看到，这些被圈出的子问题，是完全没有必要进行再次计算的，我们可以直接拿之前的计算结果来使用。




F(10)
F(7)
F(8)
F(6)
F(5)
F(4)
F(3)
F(2)
F(1)
F(0)



实际上，这就是我们所熟知的“剪枝与优化”，在这里我把一棵存在巨量冗余的递归树通过剪枝，改造成了一幅不存在冗余的递归图，极大减少了子问题（即递归图中节点）的个数。

通过这种方式，我们大幅缩减了算法的计算量，所有重复的部分都被跳过了。这时，我们再看看递归的复杂度是多少？

1. 同样，我们先考虑子问题的个数（即上图中节点的总数）。由于本算法不存在冗余计算，子问题就是 F(1), F(2), F(3) ... F(10)，因此为 O(n)；
2. 再考虑求解一个子问题的复杂度：没有计算，因此是 O(1)；
3. 综上所述，该算法的时间复杂度是 O(n)。

使用算法解决重复计算的第一步就是需要将问题定义成函数，比如上面的硬币问题，我们可以将满足 x 的最小硬币总数定义成一个函数 f(x)：

$$F(x) = \begin{cases} min(f(x-c)+1), x>0, f(x-c) \neq -1, c \in C \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$$

说明：在这个函数中，C 指的是硬币面值的集合。

那如果要处理这个问题，我们只需要避免每次都重复计算 F(x) 的结果就行了。如果有一次的路径中已经计算了 F(8)，那么如果在其它的路径中再次遇到 F(8) 的时候，我们就不需要再次计算这个路径了。

所以我们需要一个集合来存储所有 F(x) 的结果，F(x) 在计算时首先查询集合中是否存储了 F(x) 的结果，如果有则返回，没有再执行整个计算步骤。

看来，我们已经把指数级 $O(2^n)$ 时间复杂度的问题进行了“疯狂”的简化。相较于暴力递归，这就是传说中的“降维打击”。

使用备忘录求解硬币找零问题

现在，让我们再次回到硬币找零问题去实践一遍。首先这是一个可以使用动态规划解决的问题，它存在最优化问题；其次，就像我刚才所说的，该问题存在重叠子问题。

现在，让我们来看看如何使用备忘录，对硬币找零算法的复杂度进行“大刀阔斧”的简化。

我们仿照使用备忘录提高斐波那契数列算法效率的方法，对硬币找零算法进行剪枝和优化。为了简单起见，我在这里直接贴出改进后的算法实现。

Java 实现：

复制代码

```
int getMinCountsHelper(int total, int[] values, int[] memo) {
    int savedMinCount = memo[total];
    if (savedMinCount != -2) { return savedMinCount; }


    int valueLength = values.length;
    int minCount = Integer.MAX_VALUE;
    for (int i = 0;  i < valueLength; i ++) { // 遍历所有面值
        int currentValue = values[i];
        // 如果当前面值大于硬币总额，那么跳过
        if (currentValue > total) { continue; }

```

```
        // 使用当前面值，得到剩余硬币总额
        int rest = total - currentValue;
        int restCount = getMinCountsHelper(rest, values, memo);
        // 如果返回-1，说明组合不可信，跳过
        if (restCount == -1) { continue; }

        // 保留最小总额
        int totalCount = 1 + restCount;
        if (totalCount < minCount) { minCount = totalCount; }
    }

    // 如果没有可用组合，返回-1
    if (minCount == Integer.MAX_VALUE) {
        memo[total] = -1;
        return -1;
    }

    memo[total] = minCount; // 记录到备忘录
    return minCount; // 返回最小硬币数量
}

int getMinCountsSol() { // 入口函数
    int[] values = { 3, 5 }; // 硬币面值
    int total = 14; // 总值

    int[] memo = new int[total + 1];// , -2); // 备忘录，没有缓存的元素为-2
    Arrays.fill(memo, -2);
    memo[0] = 0; // 其中0对应的结果也是0，首先存在备忘录中

    // 求得最小的硬币数量，并输出结果
    return getMinCountsHelper(total, values, memo); // 输出结果
}
```

C++ 实现：

复制代码

```
int GetMinCountsHelper(int total, const std::vector<int>& values, std::vector<
    auto savedMinCount = memo[total];
    if (savedMinCount != -2) { return savedMinCount; }

    int valueLength = values.size();
    int minCount = INT_MAX;
    for (int i = 0;  i < valueLength; i ++) { // 遍历所有面值
        int currentValue = values[i];
        // 如果当前面值大于硬币总额，那么跳过
        if (currentValue > total) { continue; }

        // 使用当前面值，得到剩余硬币总额
        int rest = total - currentValue;
```

```
        int restCount = GetMinCountsHelper(rest, values, memo);
        // 如果返回-1，说明组合不可信，跳过
        if (restCount == -1) { continue; }

        // 保留最小总额
        int totalCount = 1 + restCount;
        if (totalCount < minCount) { minCount = totalCount; }
    }

    // 如果没有可用组合，返回-1
    if (minCount == INT_MAX) {
        memo[total] = -1;
        return -1;
    }

    memo[total] = minCount; // 记录到备忘录
    return minCount; // 返回最小硬币数量
}

int GetMinCountsSol() { // 入口函数
    std::vector<int> values = { 3, 5 }; // 硬币面值
    int total = 11; // 总值

    std::vector<int> memo(total + 1, -2); // 备忘录，没有缓存的元素为-2
    memo[0] = 0; // 其中0对应的结果也是0，首先存在备忘录中

    // 求得最小的硬币数量，并输出结果
    return GetMinCountsHelper(total, values, memo); // 输出答案
}
```

相较于我在上一课实现的代码，我在函数中加入了一个 memo 参数。

因此，对于原来实现的代码，算法时间复杂度可以概括为：

1. 先考虑子问题的个数，我只画了这颗树的一部分，因此从树上这个比较难看出来，但从斐波那契数列的题目上我们可以推广，得到其个数是 $O(n^m)$, $m=|values|$，即指数级别；
2. 再考虑求解一个子问题的复杂度：每个子问题中含有一个循环，因此时间复杂度为 $O(m)$, $m=|values|$；
3. 综上所述，该算法的时间复杂度是 $O(mn^m)$, $m=|values|$。

而通过备忘录优化后的算法时间复杂度为：

1. 先考虑子问题的个数，如果我们求 n 元总额的硬币最小数量，那么子问题最多就是 0...n 个，一共 n+1 个子问题；
2. 因为我们缓存了子问题的数量，所以其实每个子问题都只会被求解一次；
3. 针对每个子问题求解，我们都需要通过硬币面额数量知道需要筛选的子问题数量，每个子问题求解时的时间是 O(m), m=|values|；
4. 最后我们可以得知，采用备忘录形式时，整个时间复杂度就是子问题的数量乘以需要考虑的面额数量，也就是 O(m*n), m=|values|。

我在这里创建的备忘录 memo 其实是一个缓存数组，每次求解函数 F(x) 之后都会将结果缓存在数组中。数组初始化长度是 total+1，也就是可以存储 0-total 的计算结果。所有元素的初值都是 -2，表示没有缓存。然后我们将 memo[0] 设置为 0，表示公式中如果 x 为 0，那么 F(x) 的结果也就是 0。

接着在 GetMinCountsHelper 函数中，先查找 memo 中是否已经缓存了当前 total 的值。如果有则直接返回，如果没有那么重新计算。

重新计算完成后，如果结果为 -1（即无效组合），那么就将当前 total 对应的缓存设置为 -1，否则设置为我们计算的结果。

通过备忘录，我们避免了重复计算，即避免重复计算那些已经计算过的子问题。

重叠子问题处理模式

现在，你已经知道了如何处理具体的问题：比如斐波那契数列和硬币找零问题。但是如果我们遇到了类似新问题该如何处理呢？这里我总结一下对这类问题的处理方法。

假设面试问题是这样的：当目标为 x，其中 x 可能是一个任意长度的向量，目标可能包含多个元素，求最优解 F(x)。举个例子，比如在硬币这个问题里，x 就是硬币总额度，F(x) 就是最少的硬币数量。

同时，我们还需要知道问题是求最小值还是最大值，并以此来定义我们的数值函数 G(t)。如果求最小值，那么 G 是 min，如果求最大值，那么 G 就是 max。

除此之外，我们还需要通过当前的问题获得后续的一系列子问题，假定当前得到子问题的参数为 c，得到后续子问题的函数是 S，那么这个函数就是 S(x, c)。

接着，我们就可以用 F(S(x, c)) 来求得子问题的结果。

我们再定义一个函数 V(x)，该函数可以聚合当前参数 c 和当前子问题的结果。最后，我们还要定义每一步如何与子问题进行叠加。定义一个叠加函数 H(x)。

综上所述，最后得到如下求解公式：

$$F(x) = H(G(V(F(S(x, c)), c))$$

因此，当你解决类似问题时，只需要把问题套用到上面的公式（框架）中，就能用一个递归函数来描述所有的问题。你可以尝试把斐波那契数列和硬币问题分别套入这个模型，就知道后面的问题定义该怎么举一反三了。

在定义好问题后，你就可以编写基于递归算法的代码了。不过需要注意，上面的公式并不包含边界值的处理。所谓的边界值就是无法再分解为子问题的子问题。

比如在硬币找零问题中，x 为 0 的时候就是一个所谓的边界值。只要处理好递归函数和边界值，我们就能一通百通了。

重叠子问题缓存的限制

我们刚刚学习了重叠子问题的处理模式，提炼出了一个通用的求解公式。你可能会问，这种利用重叠子问题的缓存来提升速度的方法是不是万灵药呢？

有一句老话，叫计算机中不存在“银弹”，也就是说没有任何一种方法能够解决世界上的所有问题。通过备忘录的思想来处理重叠子问题的方法亦是如此。

1. 我们回想一下在上一课中提到过的问题，就有不少是不存在重叠子问题的，比如八皇后问题。既然没有重叠子问题，那么通过备忘录来对其优化加速，又从何谈起呢？

2. 有些问题虽然看起来像包含“重叠子问题”的子问题，但是这类子问题可能具有后效性，但我们追求的是**无后效性**。所谓无后效性，指的是在通过 A 阶段的子问题推导 B 阶段的子问题的时候，我们不需要回过头去再根据 B 阶段的子问题重新推导 A 阶段的子问题，即子问题之间的依赖是单向性的。

所以说，如果一个问题可以通过重叠子问题缓存进行优化，那么它肯定都能被画成一棵树。希望你能牢记这些限制，不然可能抓破头皮都没法解决问题，最后陷入死胡同。

方案弊端

我们可以看到，通过重叠子问题缓存可以极大加速我们的代码执行效率。但是凡事都有两面性，我们毋庸置疑，这种方案肯定是通过某种牺牲换取了性能的提升。

在硬币找零问题中，我们在代码里加入了一个 memo 数组作为备忘录，这个数组的大小是钱币总额 +1。如果计算出 F(x) 的结果，就把 F(x) 的结果存在数组中 x 的位置，这样后续再计算相同的子问题时，我们就可以利用缓存来避免重复计算了。

但这样有个问题，如果我们的钱币总额数量非常巨大，那这个数组的大小就会非常巨大，导致的结果就是会占据大量的内存存储空间，而且有很多的数字其实是不会被求解的，存在很多的“存储空洞”。显然，这是一种浪费。

同样，如果考虑为了节省空间，那么我们可以使用哈希表，但是哈希表的检索性能肯定不如数组。你可能会说，哈希表的插入和查找的算法复杂度是 O(1) 啊，它怎么可能会慢呢？

原因在于，哈希表通常都会使用经过设计的数据结构（比如拉链法）来避免记录碰撞，因此实际的速度肯定不如直接访问数组的特定位置。

因此在这个问题里，我们仍然优先选用数组和指定的索引来快速访问数据。

话说回来，如果遇到一个目标结果 x 是一个向量的情况下，这个数组就会随着向量维度一起提升，比如如果 x 是二维向量，那么缓存数组就必须是二维数组，以此类推。因此向量维度提升造成的空间压力也可能是巨大的。

所以在面试中，你需要根据实际情况，在空间和时间中寻求一个平衡，虽然这样的经验需要积累，但更多的时候是需要你在编写代码前，将这个问题考虑在内。

课程总结

今天我们学习了重叠子问题这一概念，通过斐波那契数列展现了重复计算引发的问题：暴力的递归性能低下。并在此基础上提出了备忘录的思想。

备忘录的思想极为重要，特别是当求解的问题包含**重叠子问题**时，只要面试的问题包含重复计算，你就应该考虑使用备忘录来对算法时间复杂度进行简化。具体来说，备忘录解法可以归纳为：

1. 用数组或哈希表来缓存已解的子问题答案，并使用自顶向下的递归顺序递归数据；
2. 基于递归实现，与暴力递归的区别在于备忘录为每个求解过的子问题建立了备忘录（缓存）；
3. 为每个子问题的初始记录存入一个特殊的值，表示该子问题尚未求解（如无此记录，或像求解斐波那契数列题目中那样初始化成 0）；
4. 在求解过程中，从备忘录中查询。如果未找到或是特殊值，表示未求解；否则取出该子问题的答案，直接返回。

与此同时，在求解最优解问题的时候，画出基本的递归树结构，能极大地降低问题的难度。因此，我建议你在解决此类问题的时候尝试使用这个方法。

含有备忘录的递归算法已经与动态规划思想十分相似了，从效率上说也是如此。没错！我们又进了一步。备忘录让我们实现了对算法时间复杂度的“降维打击”，这与贪心算法到递归的进步程度不同，这是真正意义上的动态规划思维：

1. 我们考虑了整体最优；
2. 在计算的过程中保存计算当中的状态，并在后续的计算中复用之前保存的状态。

记住使用备忘录来优化你的算法时间复杂度，它是提高算法效率的高级手段。我们距真正的动态规划咫尺之遥，除了重叠子问题，你还需要了解什么是**最优子结构**和**状态转移方程**，我会从下节课开始讲起。

课后思考

到目前为止，我在课程中展示算法的代码实现时，使用的递归方式都是自上而下的，那么请你思考一下这个问题：递归的顺序有办法倒转过来吗（变成自底向上）？如果可以，应该怎么做？如果不能，为什么？

欢迎留言和我分享你的答案，我会第一时间给你反馈。如果今天的内容对你有所启发，也欢迎把它分享给你身边的朋友，邀请他一起学习！

提建议

© 版权归极客邦科技所有，未经许可不得传播售卖。 页面已增加防盗追踪，如有侵权极客邦将依法追究其法律责任。

上一篇 02 | 暴力递归：当贪心失效了怎么办？

下一篇 04 | 动态规划：完美解决硬币找零

精选留言 (12)

写留言

webmin
2020-09-19

递归是分治处理问题的方法分为两部分：递和归，递是自上而下，分解问题，归是自下而上收集计算处理结果。如果要反过来就会变成先收集计算结果后分解问题在逻辑上是矛盾的。
另把递归改为迭代方式，也是在用stack或queue等模拟压栈和出栈，用在堆上分配内存的方式解决栈大小限制的问题，本质还是自上而下的。

展开

作者回复: 没错。递归算法始终是自上而下的，这是由其算法特性决定的。

6

osun
2020-09-18

递归只能自顶向下，不能自底向上，如果要实现可以借助栈数据结构

作者回复: 对～

2

Paul Shan
2020-09-24

老师能否举一个关于下面描述的例子，多谢！
有些问题虽然看起来像包含“重叠子问题”的子问题，但是这类子问题可能具有后效性，但我们追求的是无后效性。所谓无后效性，指的是在通过 A 阶段的子问题推导 B 阶段的子问题的时候，我们不需要回过头去再根据 B 阶段的子问题重新推导 A 阶段的子问题，即子问题之间的依赖是单向性的。

展开

作者回复: 理解非常正确！赞

1 1

大饶Raysir
2020-10-22

递归优化重点：剪枝重复子问题

展开

作者回复: 总结的很对。

落曦
2020-10-20

递归只能自上而下。我觉得迭代和动态规划，都是可以自顶上下或者自底向上的

作者回复: 通常来说，即便是动态规划解法，使用递归也不是特别大的问题，只不过我们有更好的方法，即使用迭代来规避递归本身带来的性能开销。

胖胖胖
2020-10-19

递归是至上而下，但实现递归依靠得是堆栈来保存外层变量，如果通过stack的话，通过栈来保持状态，模拟递归调用的顺序进行push ‘pop也能达到递归的效果

展开

作者回复: 正解。

追风筝的人
2020-10-19

F(x)=H(G(V(F(S(x,c)),c)) 好像每个问题都能用函数表达，函数即正义

作者回复: 此刻，我特别想把开篇词那张图改一改，放在这！函数即正义～

pyhhou
2020-10-12

不知道这里的 “自上而下” 和 “自底向上” 该如何理解?

如果按照递归树来理解，从结果出发到终止条件这样被称为 “自上而下” 。而从终止条件

到结果被称为 “自底向上”。那么我觉得递归完全可以做到 “自底向上”，就拿暴力的求斐波那契数举例：...

展开

作者回复: 理论上奖，所有的循环都能转换成函数递归的形式来处理。而在这里，我们说的递归其实是通过递归将大问题不断切分为小问题来处理，这样能帮助理解理解。

Penn
2020-10-08

例子中，如果memo数组有等于-1的解，那么得出的解可能就是错误的?

Penn
2020-10-08

后效性有没有具体的例子?

展开

AshinInfo
2020-09-21

这章节从 重叠子问题处理模式 开始就感觉有点懵逼，一大串数学符号和定义，是不是数学功底差导致的

作者回复: 这个主要是用数学符号的方式更精确简练地表述我们的模型，其实这个习惯后就很容易理解了，无关数学功底。

9413
2020-09-19

递归只能自上向下吧

展开

作者回复: 对!